



# CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ  
16 martie 2019

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a XII -a

## Problema 1.

Fie  $n$  un număr natural impar. Pe  $\mathbb{R}$ , definim operația algebrică  $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- Demonstrați că  $\mathbb{R}, *$  este grup.
- Demonstrați că  $\mathbb{R}, * \cong \mathbb{R}, +$ .
- Pentru  $n = 2019$ , rezolvați ecuația  $\underbrace{x * x * \dots * x}_{2019 \text{ ori}} = 2019$ .

## Problema 2.

Fie  $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ ,  $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a + b = c + d \right\}$ .

- Demonstrați că  $M_1, M_2$  au structuri de monoid, relativ la operația de înmulțire.
- Determinați mulțimile elementelor simetrizabile  $U M_1, U M_2$ .

## Problema 3.

Fie  $f : -a, a \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție pară și continuă,  $a > 0$ .

- Demonstrați că  $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + e^{kx}} dx = \int_0^a f(x) dx, (\forall) k \in \mathbb{R}$ .

- Calculați  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2} e^{2019x} + 1} dx$ .

## Problema 4.

Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\} \{x\} - 2 + 2$ .

- Demonstrați că  $f$  este periodică de perioadă  $T = 1$ .

- Calculați  $\int_0^1 f(x) dx$  și  $\int_{-2019}^{2019} f(x) dx$ .